Jak nie zostać niewolnikiem kalkulatora? Obliczenia pamięciowe i pisemne.

W miarę postępu techniki w niepamięć odeszły nawyki do wykonywania pisemnych albo pamięciowych obliczeń. O suwaku logarytmicznym, na którym kiedyś wykonywano obliczenia, większość uczniów w szkole nawet nie usłyszy...

Te tendencje są rzeczą naturalną, ale połączone z kierunkami reform naszej nieszczęsnej oświaty, powodują same niemal negatywne skutki.

Wszystko byłoby w porządku, gdyby uczeń sięgał po kalkulator dopiero wtedy, gdy nauczy się dobrze lub bardzo dobrze liczyć.
Niestety tak nie jest. Kalkulator stał się kołem ratunkowym: używany jest głównie dlatego, że olbrzymi procent uczniów nie umie sprawnie liczyć. Nie umie liczyć do tego stopnia, że bez kalkulatora nie potrafi przeprowadzić nawet niezbyt skomplikowanych rachunków.

W czasie obliczeń z użyciem kalkulatora wielu przestaje myśleć; po prostu stuka w klawisze.
Działania typu: $\frac{6,2-0,8\cdot 0,5}{0,1}$**, które sprawnie liczący wykona w pamięci, podając od razu wynik końcowy(*), są liczone bezmyślnie. Gorzej - często tak: najpierw odejmowanie, potem mnożenie i dzielenie.**

(*)Liczymy w pamięci:

1. $5\cdot 8=40$ **i mamy dwa miejsca po przecinku, czyli wynik** $0,4$
2. $6,2-0,4=5,8$
3. $5,8:0,1=58$**, bo dzieląc przez 0,1 – mnożymy przez 10**

Co należy zrobić, aby nie wpaść w tę technologiczną pułapkę i nie uzależnić się od kalkulatora?

1. **Nauczyć się/przypomnieć (i poćwiczyć, aby nabyć wprawy) wykonywać pisemnie podstawowe działania arytmetyczne na wszelkiego rodzaju liczbach (całkowitych, ułamkach dziesiętnych, mieszanych, zwykłych, procentach...).**
2. **Poznać dodatkowe możliwości, jakie daje pamięciowe wykonywanie działań.**
3. **Systematycznie używać tych narzędzi, czyli starać się kalkulatora używać tylko wtedy, gdy zależy nam na czasie, albo, gdy wykonujemy obliczenia, których ręczne wykonanie jest czasochłonne, np. dzielenie liczb** $3,42685:23,57$**. Bez częstego liczenia całe nabyte umiejętności ulegną zapomnieniu...**

Wykonując obliczenia w pamięci, należy używać metod, które różnią się znacznie od wykonywanych podczas pisemnych obliczeń.

$93-38$
Liczymy w dwóch etapach: $93-33=60$ **i** $60-5=55$

$354+172$
Liczymy: $354+172=400+120+6=526$

Można tu stosować różne techniki zależne od upodobań, lecz ich idea została w powyższych przykładach zilustrowana.

Dużo większe możliwości liczenia pamięciowego daje mnożenie liczb.
Przykłady.

1. $102 \cdot 56$
   Licz tak: $100 \cdot 56 = 5600$
   $2 \cdot 56 = 112$
   Razem: 5712
2. $25 \cdot 73$
   Licz tak: $100 \cdot 73 = 7300$
   $25 \cdot 73$ **to 4 razy mniej**
   połowa z 7300 to 3650
   połowa z 3650 to 1825
   Dlaczego tak? Połowa z połowy to $\frac{1}{4}$**. W pamięci łatwiej podzielić przez 2, a przez 4 trudniej.**
3. 99^2
   Licz tak: $99^2 = 99 \cdot 99$
   $100 \cdot 99 = 9900$
   $1 \cdot 99 = 99$
   $9900 - 99 = 9801$
4. $9 \cdot 57$
   Licz tak: $10 \cdot 57 = 570$
   $1 \cdot 57 = 57$
   $570 - 57 = 513$
5. $50 \cdot 47$
   Licz tak: $100 \cdot 47 = 4700$
   $50 \cdot 47$ **to połowa z 4700, czyli 2350**
6. $15 \cdot 62$
   Licz tak: $10 \cdot 62 = 620$
   $5 \cdot 62$ **to połowa z 620, czyli 310.**
   $620 + 310 = 930$

Ogólnie: metodę dostosowujemy do mnożonych liczb.

Warto ze względu na użyteczność (częste występowanie), nauczyć się mnożyć dwie liczby dwucyfrowe.
Wyprowadzimy metodę takiego mnożenia.
Mnożymy liczbę $10a + b$ **przez** $10x + y$.

$$(10a + b) \cdot (10x + y) = 100ax + 10ay + 10bx + by = 100ax + 10 \cdot (ay + bx) + by$$

- **ax – to liczba setek wyniku, czyli jest to iloczyn cyfr dziesiątek obu liczb**
- $ay + bx$ **- liczba dziesiątek wyniku to suma iloczynów cyfry dziesiątek jednej liczby przez cyfrę jedności drugiej**
- **by – liczba jedności wyniku (iloczyn cyfr jedności obu liczb)**

A teraz zastosujemy tą metodę mnożąc $48 \cdot 56$:

1. **Krok pierwszy: mnożymy cyfry jedności $8 \cdot 6 = 48$**
   Jedności mamy 8, a liczbę 4 zapamiętujemy (powiększy ona liczbę dziesiątek wyniku). Piszemy więc wynik mnożenia od tyłu: ...8 (i 4 pamiętamy).
2. **Krok drugi: liczymy sumę iloczynów cyfry dziesiątek jednej liczby przez cyfrę jedności drugiej: $4 \cdot 6 + 8 \cdot 5 = 24 + 40 = 64$.**
   64 jest liczbą dziesiątek, ale z kroku pierwszego zostały nam jeszcze 4 dziesiątki, łącznie mamy 68 dziesiątek.
   Cyfrę 8 dopisujemy do wyniku: ...88, a liczbę 6 zapamiętujemy (powiększy ona liczbę setek wyniku).
3. **Mnożymy cyfry dziesiątek: $4 \cdot 5 = 20$ i dodajemy zapamiętaną liczbę 6: $20 + 6 = 26$. Zapisujemy wynik: 2688.**

Jeszcze jeden przykład (bez opisu słownego):
$37 \cdot 29 = ...3$ (pamiętamy 6)
$37 \cdot 29 = ...73$ (pamiętamy 4)
$37 \cdot 29 = 1073$

Dzielenie nie daje takich możliwości, jak mnożenie. Najczęściej wykonujemy je pisemnie, choć są wyjątki.
Dobrym przykładem jest dzielenie przez liczby jednocyfrowe – tu piszemy wynik „z pamięci". Przykład:
$71487 : 9$
71 dzielimy przez 9 i mamy pierwszą cyfrę wyniku: 7, bo $7 \cdot 9 = 63$.
Zapamiętujemy resztę z dzielenia: $71 - 63 = 8$.
Do cyfry 8 „dopisujemy" w pamięci następną cyfrę dzielnej, czyli 4.
Będziemy dzielić 84 przez 9: 9 i reszta 3.
9 dopisujemy do wyniku, mamy teraz 79, a do cyfry 3 „dopisujemy" 8.
38:9 daje 4 i resztę 2. Teraz wynik wygląda tak: 794, a do cyfry 2 „dopisujemy" 7.
27:9=3, czyli końcowy wynik: 7943.

Taki ciąg czynności jest zwykłym dzieleniem pisemnym, ale piszemy sam wynik, a resztę obliczeń przeprowadzamy w pamięci.

Pamiętajmy jednak, że wyjątków jest więcej.
Dzielimy przez 20? To podzielmy przez 2, a potem przesuńmy przecinek o jedno miejsce w lewo (dzielenie przez 10).
Dzielimy przez 50? To podzielmy przez 100, a potem pomnóżmy otrzymany wynik przez 2. I tak dalej, przykłady można mnożyć.

Na koniec porozmawiamy nieco o obliczaniu pierwiastków. Można takie obliczenia przeprowadzać pisemnie, choć przydatna jest głównie umiejętność obliczania pierwiastka kwadratowego.

Przed obliczeniem pierwiastka kwadratowego, np. $\sqrt{2237{,}29}$ „dzielimy" liczbę na dwucyfrowe grupy, poczynając od przecinka w obie strony:
$\sqrt{\underline{22}\,\underline{37},\underline{29}\,\underline{00}\,\underline{00}\ldots}$
Grupy $\underline{00}$ będą potrzebne, gdy będziemy chcieli obliczyć pierwiastek z większą dokładnością, a obliczenia nie zakończą się na grupie $\underline{29}$.

Liczymy:

$\sqrt{2237{,}29}$

1. **Krok 1: wykonywany tylko raz i odmienny od następnych.**
   Szukamy największej liczby naturalnej x, której kwadrat $x^2 \leq 22$. Taką liczbą jest 4, bo $4^2 = 16 \leq 22$, a $5^2 = 25 > 22$.
   Jest to pierwsza cyfra wyniku:
   $\sqrt{2237{,}29} = 4$
   $\underline{-16}$
   6
   Działania tu wykonywane nie wymagają komentarza – podobieństwo do dzielenia liczb jest uderzające.
   Teraz do otrzymanej liczby 6 dopisujemy następną grupę cyfr:
   $\sqrt{2237{,}29} = 4$
   $\underline{-16}$
   637
   i wykonujemy
2. **Krok 2.**
   Poszukujemy teraz drugiej cyfry wyniku, oznaczmy ją: Θ
   Dotychczas otrzymany wynik (ewentualny przecinek nieistotny) mnożymy przez 2: otrzymujemy 8.
   Należy teraz znaleźć największą cyfrę Θ taką, by $637 \geq 8\Theta \cdot \Theta$
   Szukaną cyfrą nie jest 8, bo $88 \cdot 8 = 704 > 637$.
   Natomiast $87 \cdot 7 = 609 < 637$.
   Mamy następną cyfrę wyniku. Jest nią 7:
   $\sqrt{2237{,}29} = 47$
   $\underline{-16}$
   637 $\quad 87 \cdot 7$
   $\underline{-609}$
   28
   Dopisujemy następną grupę cyfr (przeskakujemy przecinek, więc w wyniku też przecinek się pojawi).
   $\sqrt{2237{,}29} = 47,$
   $\underline{-16}$
   637 $\quad 87 \cdot 7$
   $\underline{-609}$
   2829 $\quad 94\Theta \cdot \Theta$
   Podobnie jak poprzednio otrzymany do tej pory wynik 47 mnożymy przez 2 (mamy 94), i szukamy takiej cyfry Θ, by $2829 \geq 94\Theta \cdot \Theta$.
   Taką cyfrą jest 3: $943 \cdot 3 = 2829$.

$\sqrt{2237,29} = 47,3$

$\underline{-16}$

$637 \quad 87 \cdot 7$

$\underline{-609}$

$2829 \quad 943 \cdot 3$

$\underline{-2829}$

=

Otrzymaliśmy wynik dokładny.

Spróbujemy teraz z dokładnością do dwóch cyfr po przecinku obliczyć $\sqrt{7}$:

$\sqrt{7} = 2,641$

$\underline{-4}$

$300 \quad 46 \cdot 6$

$\underline{-276}$

$2400 \quad 524 \cdot 4$

$\underline{-2096}$

$10400 \quad 5281 \cdot 1$

$\underline{-5281}$

5119... itd.

Otrzymaliśmy $\sqrt{7} \approx 2,64$